Sviluppi di Taylor di ordine superiore

Teorema 1 (Teorema di Taylor)**.** *Siano Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F:\Omega\to\mathbb{R}$ una funzione di classe $C^k(\Omega)$, $k\ge 1$. Allora*

$$F(X_0+X)=\sum_{j=0}^{k}T_j(X)+o\big(|X|^k\big),$$

dove per ogni $j=0,\dots,k$, T_j è il j-esimo polinomio di Taylor in X_0, ovvero:

- *T_0 è il polinomio costante:*

$$T_0(X)=F(X_0)\quad \textit{per ogni}\quad X\in\mathbb{R}^n.$$

- *P_1 è dato da*

$$T_1(X)=X\cdot\nabla F(X_0)=\sum_{i=1}^{n}\partial_iF(X_0)x_i\quad \textit{per ogni}\quad X=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

- *T_2 è il polinomio*

$$T_2(X)=\frac12 X\cdot\nabla^2F(X_0)[X]=\frac12\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\partial_{ij}F(X_0)x_ix_j\quad \textit{per ogni}\quad X=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

- *per $k\ge 3$, T_k è il polinomio*

$$T_k(X)=\frac{1}{k!}\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_k=1}^{n}\partial_{j_1j_2\dots j_k}F(X_0)x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_k}\quad \textit{per ogni}\quad X=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

Dimostrazione in dimensione due. Useremo la notazione $X=(x,y)$ e $X_0=(x_0,y_0)$.
Ragionando per induzione, supponiamo che la tesi sia vera per un $k\ge 1$. Dimostreremo il teorema è vero anche per $k+1$. Ora, siccome le funzioni

$$\partial_xF:\Omega\to\mathbb{R}\qquad \text{e}\qquad \partial_yF:\Omega\to\mathbb{R}$$

sono di classe C^k, abbiamo

$$\partial_xF(x+x_0,y+y_0)=\sum_{j=0}^{k}P_j(x,y)+\varepsilon_1(x,y),$$

$$\partial_yF(x+x_0,y+y_0)=\sum_{j=0}^{k}Q_j(x,y)+\varepsilon_2(x,y),$$

dove P_j e Q_j sono i polinomi di Taylor delle funzioni ∂_xF e ∂_yF in (x_0,y_0), mentre ε_1 e ε_2 sono tali che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon_1(x,y)}{\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^k}=0\qquad \text{e}\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\varepsilon_2(x,y)}{\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^k}=0. \tag{1}$$

Ora, fissiamo (x,y) in intorno di $(0,0)$ e calcoliamo

$$\begin{aligned}
F(x+x_0,y+y_0)-F(x_0,y_0) &= \int_0^1 (x,y)\cdot\nabla F(x_0+sx,y_0+sy)\,ds \\
&= \int_0^1 x\,\partial_x F(x_0+sx,y_0+sy)\,ds + \int_0^1 y\,\partial_y F(x_0+sx,y_0+sy)\,ds \\
&= \int_0^1 x\Big(\sum_{j=0}^k P_j(sx,sy)+\varepsilon_1(sx,sy)\Big)\,ds \\
&\quad\quad + \int_0^1 y\Big(\sum_{j=0}^k Q_j(sx,sy)+\varepsilon_2(sx,sy)\Big)\,ds \\
&= \int_0^1 x\Big(\sum_{j=0}^k s^j P_j(x,y)+\varepsilon_1(sx,sy)\Big)\,ds \\
&\quad\quad + \int_0^1 y\Big(\sum_{j=0}^k s^j Q_j(x,y)+\varepsilon_2(sx,sy)\Big)\,ds \\
&= \sum_{j=0}^k \frac{1}{j}\Big(xP_j(x,y)+yQ_j(x,y)\Big) + \int_0^1 \Big(x\varepsilon_1(sx,sy)+y\varepsilon_2(sx,sy)\Big)\,ds.
\end{aligned}$$

Ora, siccome

$$T_0(x,y)=F(x_0,y_0)$$

e per ogni $j\geq 0$, si ha

$$T_{j+1}(x,y)=\frac{1}{j}\Big(xP_j(x,y)+yQ_j(x,y)\Big),$$

otteniamo

$$F(x+x_0,y+y_0)=\sum_{j=0}^{k+1} T_j(x,y)+\int_0^1 \Big(x\varepsilon_1(sx,sy)+y\varepsilon_2(sx,sy)\Big)\,ds.$$

Infine, siccome

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^{k+1}} \int_0^1 \Big(x\varepsilon_1(sx,sy)+y\varepsilon_2(sx,sy)\Big)\,ds = 0,$$

abbiamo la tesi. $\square$